Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(adapté de Banque PT Maths C 2013)

Partie I

On considère les fonctions ϕ et ψ, respectivement définies par :

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos(t)}{x}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout réel t strictement positif : $\dfrac{|\sin(t)|}{t} \leqslant 1$.
2. Montrer que ϕ et ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit a un réel strictement positif. Etudier la continuité et la dérivabilité de ϕ et ψ sur $[a, +\infty[$.
4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $\phi'(x)$ et $\psi(x)$.
5. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
$$\phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$
6. Montrer que ϕ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x)$ pour tout réel strictement positif x.
8. On admet que ϕ est également définie et continue en 0

   Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?

Partie II

9. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).
   (d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle :

$$\left(1-x^2\right) f'(x) - x f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_f)$$

10. On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

   (a) Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.
   (b) Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.
   (c) Donner le développement en série entière de f.

Exercice 2 Un jeu de société

(*CCINP PC 2023*)

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
— si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
— sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I — Préliminaires

1. *Modélisation*

   Dans cette question, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?
   (b) Que représente la variable aléatoire T ?
2. *Calcul de la somme d'une série entière*

   On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

(a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \leqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1 .

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1t[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II — Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

3. *Loi des variables aléatoires S_n et T*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

(b) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction des évènements $[S_{k-1} = A-1]$ et $[X_k = 1]$. En déduire que :

$$\mathbb{P}(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

(d) Calculer $\mathbb{P}(T = 0)$.

4. *Espérance de la variable aléatoire T*

On rappelle que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est définie comme la somme de la série entière $\sum_{k \geqslant A} \mathbb{P}(T = k) x^k$ sur son intervalle de convergence.

(a) Déterminer le rayon de convergence R_T de la série entière $\sum_{k \geqslant A} \mathbb{P}(T = k) x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

(b) En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III — Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

5. *Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(S_n \leqslant k)$*

Dans cette question, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $([X_{n+1} = 0], \cdots, [X_{n+1} = M-1])$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k - \ell).$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

6. *Espérance de la variable aléatoire T*

   On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite :

   Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n>0} \mathbb{P}(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)$$

   (a) Que peut-on dire des évènements $[T > n]$ et $[S_n < A]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

   (b) En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.